

TEMA 3. DETERMINANTES

Determinante: Número asociado a una matriz **cuadrada**.

Propiedades:

1) $|A| = |A^t|$

2) Si en un determinante tenemos una fila (o columna) que es combinación lineal de las restantes $\rightarrow |A| = 0$

3) Si permutamos 2 filas (o columnas) el determinante cambia de signo.

4) Si en un determinante una fila (o columna) está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese n° .

OJO: $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A| \neq \lambda \cdot |A|$

5) $|A+B| \neq |A| + |B|$

6) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

7) Si a una fila (o columna) le sumamos (o restamos) una combinación lineal de las restantes filas o columnas el determinante no cambia.

8) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ si $|A| \neq 0$

Menor complementario:

Se denomina **menor complementario** del elemento a_{ij} designándolo por Δ_{ij} , al determinante de orden $n - 1$ obtenido al suprimir la fila i y la columna j del determinante inicial.

Adjunto

Se denomina adjunto del elemento a_{ij} a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$

Cálculo práctico de determinantes

- Si $n=2 \rightarrow$ Regla de **Sarrus**

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

- Si $n=3 \rightarrow$ Regla de **Sarrus**

Ejemplo:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Nota: Antes de aplicar la regla se puede intentar simplificar el determinante mediante combinaciones lineales.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{cases} F_1 = F_1 - 2 \cdot F_3 \\ F_2 = F_2 - 3 \cdot F_3 \end{cases} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-33) + 0 - (-36) - 0 - 0 = 3$$

Aunque con $n=3$ no es lo más habitual, siempre podemos calcular el determinante de otra manera distinta a Sarrus. Este segundo método consiste en desarrollar por los elementos de una fila o de una columna.

Ejemplo:

↓
adjuntos de

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 38 + 3 \cdot (-1) \cdot 9 + 1 \cdot 1 \cdot (-46) = 76 - 27 - 46 = 3$$

Nota: También con este método podemos intentar simplificar previamente el determinante mediante combinaciones lineales.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{cases} F_1 = F_1 - 2 \cdot F_3 \\ F_2 = F_2 - 3 \cdot F_3 \end{cases} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 12 & -11 \end{vmatrix} = -33 + 36 = 3$$

- Si $n > 3 \rightarrow$ **NO** regla de Sarrus, tenemos que desarrollar el determinante por los elementos de una fila o de una columna.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} - 3 \cdot A_{31} + 8 \cdot A_{41} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -3 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} +$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Nota: Antes de aplicar la regla se puede intentar simplificar el determinante mediante combinaciones lineales.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 & -3 \\ 8 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{cases} F_1 = F_1 - 2F_2 \\ F_3 = F_3 + 3F_2 \\ F_4 = F_4 - 8F_2 \end{cases} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 & -9 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 19 & 15 \\ 0 & 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 1A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -5 & 19 & 15 \\ 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 19 & 15 \\ 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = \begin{cases} F_2 = F_2 + 19F_1 \\ F_3 = F_3 + 29F_1 \end{cases} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 33 & 0 & 72 \\ -78 & 0 & 50 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 33 & 72 \\ 78 & 50 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1650 - 5616) = 11898 - 162$$

HOMEWORK

Nota: A esta forma de simplificar se le llama regla de **CHIO** y al elemento a_{21} se le llama elemento **pivote**.

Nota2: Una vez reducido el determinante de $n=4$ a $n=3$ al aplicar una vez CHIO podemos terminar el determinante por Sarrus o podemos terminarlo como hemos hecho.

Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a) \cdot (d-b) \cdot (d-c) \cdot (c-a) \cdot (c-b) \cdot (b-a)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^x & x & 2 & x^2 \\ e^{2x} & x^2 & 4 & x^4 \\ e^{3x} & x^3 & 8 & x^6 \end{vmatrix} = (x^2 - e^x) \cdot (x^2 - x) \cdot (x^2 - 2) \cdot (2 - e^x) \cdot (2 - x) \cdot (x - e^x)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMAS DE DETERMINANTES

1

Si f , g y h son aplicaciones lineales, calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) \\ f(\mu\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) & h(\mu\bar{x}) \\ f(\gamma\bar{x}) & g(\gamma\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) + h(\gamma\bar{x}) \end{vmatrix}$$

2

Consideramos una matriz cuadrada A , notamos el determinante de $A = |A|$, dicha matriz cumple $|A|=1$ $|2A|=8$ entonces:

- a) El orden de A es 3.
- b) No existe una matriz que cumpla esas condiciones.
- c) El $|A|=2$ para cualquier orden de A .

3

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}$ entonces:

- a) $|A|=0$
- b) $|A|$ es múltiplo de 5
- c) $|A|=12$

4

Consideramos una matriz cuadrada de orden 2, notamos el determinante de $A = |A|$, dicha matriz cumple $|2A|=8$ entonces:

- a) $|A|=4$
- b) $|A|=2$
- c) $|A|=1$

5

Sea A una matriz cuadrada de orden n con $|A|=0$, entonces

- a) $\text{Rang}(A) \neq n$
- b) $\text{Rang}(A) = (n-1)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

c) Si A es antisimétrica y n es impar, $|A|=0$.

7

Sea A una matriz cuadrada no singular. Sea S la suma de los productos de los elementos de una columna por los adjuntos de una paralela a ella multiplicados respectivamente por dos. Entonces

- a.- S coincide con el determinante de A
- b.- S es el doble del determinante de A
- c.- $S = 0$
- d.- Siendo $S \neq 0$, no tienen nada que ver

S y determinante de A :

Respuesta.- Es correcta la

8

Se dan las matrices A y B de $n \times n$, siempre se verifica las afirmaciones siguientes

- 1.- Si A es regular $\Rightarrow A^t$ es singular \rightarrow Falsa $|A| = |A^t|$, no pueden ser singulares y regulares
- 2.- Si A es regular $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ **Cierta**
- 3.- $|A+B| = |A| + |B|$ **Falsa**
- 4.- $|A \cdot B| \neq |A| \cdot |B|$ **Falsa**
- 5.- son todas falsas **Falsa**
- 6.- son todas ciertas **Falsa**

Respuesta.- Es correcta la

9

Dadas las matrices A, B, C de $n \times n$; se verifica

- 1.- $A \cdot B = AC \Rightarrow B = C$ **Falso**
- 2.- $A \cdot B = AC \Rightarrow B = C$ **siempre que A**

admite matriz inversa

- 3.- $AB = AC$ y B admite matriz inversa

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

10

Sea D el determinante de orden n ,

$n > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Su valor sera:

- 1.- si n es impar, su valor es -1 ; y si es par, 1
- 2.- siempre vale 1
- 3.- siempre vale -1
- 4.- cualquier otro valor distinto de uno
- 5.- o verdadero C1 y C2 son iguales
- 6.- son todas falsas

Respuesta.- La correcta es la \therefore

11

Sea el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ y sea A una matriz de dicho conjunto.

Multipliquemos dicha matriz por un escalar α , siendo $\alpha \neq 0$. Entonces el $|\alpha A|$ es:

- 1.- $n^\alpha |A|$ Falso
- 2.- $\alpha |A|$ Falso
- 3.- $\alpha^n |A|$ Verdadero
- 4.- $\alpha^2 |A|$ Falso
- 5.- $n\alpha |A|$ Falso
- 6.- son todas falsas Falso

Respuesta.- Es correcta la \therefore

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1 Si f , g y h son aplicaciones lineales, calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) \\ f(\mu\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) & h(\mu\bar{x}) \\ f(\gamma\bar{x}) & g(\gamma\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) + h(\gamma\bar{x}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda f(\bar{x}) & \lambda g(\bar{x}) & \lambda g(\bar{x}) \\ \mu f(\bar{x}) & \mu g(\bar{x}) & \mu h(\bar{x}) \\ \gamma f(\bar{x}) & \gamma g(\bar{x}) & \mu g(\bar{x}) + \gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix} = \lambda\mu \begin{vmatrix} f(\bar{x}) & g(\bar{x}) & g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}) & g(\bar{x}) & h(\bar{x}) \\ \gamma f(\bar{x}) & \gamma g(\bar{x}) & \mu g(\bar{x}) + \gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix}$$

Si f es aplicación lineal (homomorfismo), verifica $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$

$$= \lambda\mu f(\bar{x}) g(\bar{x}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & g(\bar{x}) \\ 1 & 1 & h(\bar{x}) \\ \gamma & \gamma & \mu g(\bar{x}) + \gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix} = 0$$

\uparrow
 $C_1 = C_2$

2 Consideramos una matriz cuadrada A , notamos el determinante de $A = |A|$, dicha matriz cumple $|A| = 1$ $|2A| = 8$ entonces:

- a) El orden de A es 3.
- b) No existe una matriz que cumpla esas condiciones.
- c) El $|A| = 2$ para cualquier orden de A .

$$|2A| = 2^n |A|$$

$$8 = 2^n \cdot 1 \rightarrow n = 3 \text{ (opción a)}$$

3 $|A| = (5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ (opción c)

4 $|2A| = 2^2 |A| \rightarrow 8 = 4 |A| \rightarrow |A| = 2$ (opción b)

- 5
- a) Falsa, $|A^t| = |A| = 0 \rightarrow A^t$ no tiene inversa
 - b) Falsa, si $|A| = 0$ sabemos que A tiene alguna (o varias) filas (o columnas) ld, pero no necesariamente 1
 - c) Falsa por lo comentado en b) y teniendo en cuenta que $R(A) = R(A^t)$
 - a) Verdadera, mejor aun si $\text{Rango} < n$

6 Si A es antisimétrica: $A^t = -A \rightarrow |A^t| = |-A|$

$$|A| = (-1)^n |A|$$

Si n impar:

$$|A| = -|A|$$

$$2|A| = 0$$

$$|A| = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 22 \end{vmatrix} = 66 - 36 = 30 \neq 0$$

$$C1) S = 2(1A_{12} + 4A_{22} + 7A_{32}) = 2(1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}) = 2(46 + 4(-22) + 7 \cdot 6) = 0$$

$$S = 2(1A_{13} + 4A_{23} + 7A_{33}) = 2(1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}) = 2(-3 + 4(6) + 7(-3)) = 0$$

$$C2) S = 2(2A_{11} + 5A_{21} + 8A_{31}) = 2(2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 8(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}) = 2(2 \cdot (-53) + 5(26) + 8(-3)) = 0$$

$$S = 2(2A_{13} + 5A_{23} + 8A_{33}) = 2(2 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 8(-3)) = 0$$

$$C3) S = 2(3A_{11} + 6A_{21} - 1A_{31}) = 2(3 \cdot (-53) + 6(26) - 1(-3)) = 0$$

$$S = 2(3A_{12} + 6A_{22} - 1A_{32}) = 2(3 \cdot 46 + 6(-22) - 1 \cdot (6)) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70